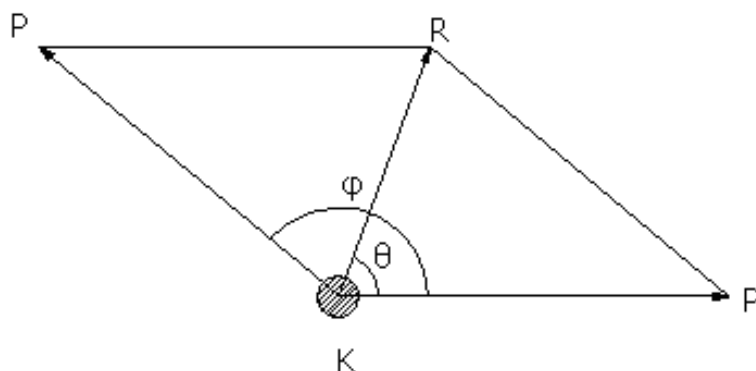


1: Σε κολώνα έχουν δεθεί δύο συρματοσχοίνα, που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\phi=140^\circ$. Η τάση των συρματοσχοίων είναι $P=80\text{KN}$. Να βρεθεί κατά μέτρο και θέση η συνισταμένη δύναμη, που ασκείται στην κολώνα.



Στο σχήμα φαίνεται η διάταξη του προβλήματος.

Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης βρίσκεται με κατευθείαν εφαρμογή του τύπου:

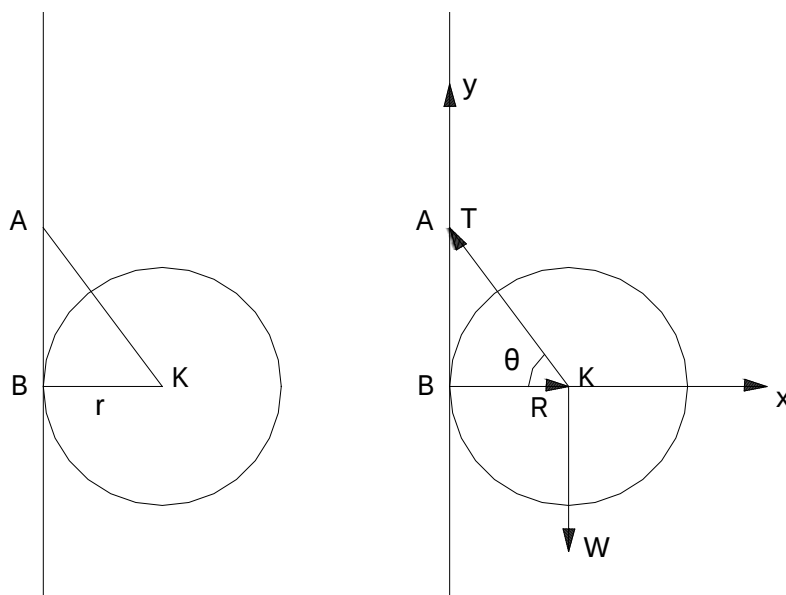
$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos\phi} = \sqrt{80^2 + 80^2 + 2 \cdot 80 \cdot 80 \cdot \cos(140^\circ)} = 54.72\text{KN}$$

Η διεύθυνση της συνισταμένης βρίσκεται από τον νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο KRP, δηλαδή:

$$\frac{\sin\phi}{R} = \frac{\sin\theta}{P} \Rightarrow \sin\theta = \frac{P \cdot \sin\phi}{R} = \frac{80 \cdot \sin(140^\circ)}{54.12} \cong 0.93 \Rightarrow \theta \cong 70^\circ$$

Βρίσκουμε δηλαδή ότι $\theta = 70 = \frac{\phi}{2} = \frac{140}{2}$. Το αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο, διότι το παραλληλόγραμμο των δυνάμεων είναι ρόμβος (αφού οι δυνάμεις είναι ίσες). Και είναι γνωστό ότι οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.

2: Σφαίρα ακτίνας $r = 12\text{cm}$ και βάρους $W = 250\text{N}$ αναρτάται από σταθερό σημείο Α κατακόρυφου τοίχου με τη βοήθεια σχοινιού μήκους $l = 20\text{cm}$ δεμένου στο κέντρο της. Να υπολογίσετε την τάση T του σχοινιού και τη δύναμη R που ασκεί η σφαίρα στον τοίχο.



Για την επίλυση του προβλήματος πρέπει να εξετάσουμε την ισορροπία της σφαίρας. Η σφαίρα δέχεται τις ακόλουθες δυνάμεις:

Το βάρος της W , το οποίο εφαρμόζεται στο κέντρο K και με διεύθυνση προς το κέντρο της γης.

Την τάση T του σχοινιού. Αυτή έχει τη διεύθυνση του σχοινιού.

Την δύναμη R από την επαφή της με τον τοίχο. Η δύναμη αυτή ασκείται στο σημείο επαφής και έχει διεύθυνση κάθετη στην (κατακόρυφη) επιφάνεια επαφής, άρα είναι οριζόντια.

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις, κατασκευάζουμε το Δ.Ε.Σ. της σφαίρας.

Παρατηρούμε ότι όλες οι δυνάμεις βρίσκονται στο επίπεδο ABK , συνεπώς μπορούμε να εξετάσουμε το πρόβλημα μόνο στο επίπεδο αυτό. (Αφού δεν υπάρχουν δυνάμεις κατά διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο ABK , αυτόματα ικανοποιείται η συνθήκη ισορροπίας κατά τη διεύθυνση αυτή).

Για την ισορροπία της σφαίρας πρέπει να ικανοποιούνται οι άλλες δύο συνθήκες ισορροπίας (πάνω στο επίπεδο ABK), που είναι:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \quad (1)$$

Κατ' αρχάς πρέπει να επιλέξουμε σύστημα αξόνων, που να απλοποιεί τη διαδικασία εύρεσης των συνιστωσών των δυνάμεων στους κύριους άξονες. Στο πρόβλημά μας επιλέγεται σύστημα με τον άξονα x παράλληλο στη δύναμη R και άξονα y παράλληλο στο βάρος W . Οι συνιστώσες όλων των δυνάμεων ως προς αυτό το σύστημα είναι:

$$\begin{aligned} R_x &= R \\ R_y &= 0 \\ W_x &= 0 \\ W_y &= -W \\ T_x &= -T \cdot \cos(\theta) \\ T_y &= T \cdot \sin(\theta) \end{aligned} \quad (2)$$

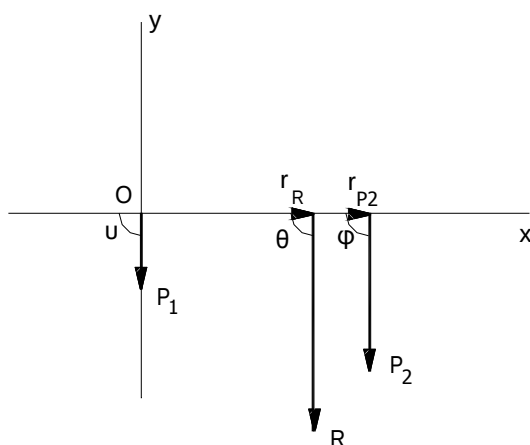
Παρατηρώντας το σχήμα βλέπουμε ότι:

$$\cos(\theta) = \frac{KB}{KA} = \frac{12}{20} = 0.6 \Rightarrow \theta \cong 53.13 \Rightarrow \sin(\theta) = 0.8 \quad (3)$$

Με αντικατάσταση των (2) και (3) στην (1), παίρνουμε:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{ix} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n P_{iy} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} R_x + W_x + T_x &= 0 \\ R_y + W_y + T_y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} R + 0 - 0.6T &= 0 \\ 0 - 250 + 0.8T &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} R &= 187.5 \\ T &= 312.5 \end{aligned} \right.$$

3: Να υπολογισθεί η συνισταμένη $\vec{R}$ δύο παράλληλων δυνάμεων $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ με μέτρα $P_1 = 200\text{KN}$ και $P_2 = 500\text{KN}$ που απέχουν 20m.



Επιλέγω σύστημα συντεταγμένων τέτοιο ώστε ο άξονας y να είναι παράλληλος στους φορείς των δυνάμεων και η δύναμη $\mathbf{P}_1$ να διέρχεται από την αρχή O των αξόνων. Σε αυτή την περίπτωση έχω τις συνιστώσες των δυνάμεων:

$$P_{1x} = P_{2x} = 0$$

$$P_{1y} = P_1$$

$$P_{2y} = P_2$$

Συνεπώς, οι συνιστώσες της συνισταμένης θα είναι:

$$R_x = P_{1x} + P_{2x} = 0$$

$$R_y = P_{1y} + P_{2y} = P_1 + P_2 = 700\text{KN}$$

Βλέπουμε ότι η συνισταμένη θα είναι παράλληλη στον άξονα y (άρα και παράλληλη στις δύο δυνάμεις).

Υπολογίσουμε τη συνισταμένη $\vec{\mathbf{R}}$ κατά μέτρο και διεύθυνση. Απομένει να υπολογίσουμε τη θέση της.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Varignon η ροπή της συνισταμένης $\vec{\mathbf{R}}$ των δυνάμεων $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ ως προς τυχόν σημείο είναι ίση με το άθροισμα των ροπών των $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ ως προς το ίδιο σημείο.

Επιλέγω το σημείο O της αρχής των αξόνων ως προς το οποίο θα εξετάσω τις ροπές των δυνάμεων. Θα πρέπει, λοιπόν:

$$\vec{\mathbf{r}}_R \times \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{r}}_{P_1} \times \vec{\mathbf{P}}_1 + \vec{\mathbf{r}}_{P_2} \times \vec{\mathbf{P}}_2 \Rightarrow r_R \cdot R \cdot \sin(\theta) = r_{P_1} \cdot P_1 \cdot \sin(u) + r_{P_2} \cdot P_2 \cdot \sin(\phi) \Rightarrow$$

$$r_R \cdot 700 \cdot \sin(90^\circ) = 0 \cdot 0 \cdot \sin(90^\circ) + 20 \cdot 500 \cdot \sin(90^\circ) \Rightarrow \quad \text{Άρα η}$$

$$r_R = \frac{20 \cdot 500}{700} = \frac{100}{7} \cong 14.29\text{m}$$

συνισταμένη θα έχει μέτρο $R = 700\text{KN}$, θα είναι παράλληλη στις $\vec{\mathbf{P}}_1, \vec{\mathbf{P}}_2$ και θα έχει από την $\vec{\mathbf{P}}_1$ απόσταση $r_R = 14.29\text{m}$.