

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

➤ Αόριστα Ολοκληρώματα

Παράγουσα Συνάρτηση: Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε κάποιο διάστημα Δ . Αν υπάρχει συνάρτηση F τέτοια ώστε να ισχύει:

$$F'(x) = f(x), \forall x \in \Delta$$

Τότε την συνάρτηση F την ονομάζω **παράγουσα** ή **αρχική** συνάρτηση της f .

Π.χ: η $f(x) = 2x$, έχει μια παράγουσα την $F(x) = x^2$. Αλλά όχι μόνο αυτή. Παράγουσες της f είναι και οι: $F(x) = x^2 + 1$, $F(x) = x^2 + 2$, $F(x) = x^2 + \ln 3$, ...κτλ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \Delta,$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα $\subset$ της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \Delta, c = \text{σταθ.}$$

ΑΟΡΙΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1. $\int 0 dx = c$
2. $\int 1 dx = x + c$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
4. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$
5. $\int \cos x dx = \sin x + c$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$
9. $\int e^x dx = e^x + c$
10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

Σε όλα τα παραπάνω, το $c = \text{σταθ.}$

Ισχύουν οι ιδιότητες:

- ✓ $\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx, \lambda \in \mathbb{R}$
- ✓ $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

1. Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\begin{aligned}\text{Π.χ: } \int x^2 e^x dx &= \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - \int (x^2)' e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = \\ &= x^2 e^x - \int 2x (e^x)' dx = \\ &= x^2 e^x - \left[2x e^x - \int (2x)' e^x dx \right] = \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + \int 2 e^x dx = \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c\end{aligned}$$

2. Ολοκλήρωση Με Αντικατάσταση: Η μέθοδος αυτή υπολογίζει ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

Στο παραπάνω ολοκλήρωμα, **θέτω**: $u = g(x)$ και $du = g'(x)dx$ οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Π.χ: $\int 2x\sqrt{x^2 + 1} dx$, θέτω $u = x^2 + 1$, άρα $du = (x^2 + 1)' dx = 2x dx$
Αντικαθιστώντας στο παραπάνω ολοκλήρωμα έχω:

$$\int 2x\sqrt{x^2 + 1} dx = \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3} u^{3/2} + c = \frac{2}{3} \sqrt{(x^2 + 1)^3} + c$$

➤ Ορισμένα Ολοκληρώματα

Τα ολοκληρώματα αυτά χρησιμοποιούνται πολύ συχνά για τον υπολογισμό εμβαδού που περικλείεται μεταξύ μιας γραφικής παράστασης και ενός άξονα.

Ιδιότητες Ορισμένου Ολοκληρώματος

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Έστω f, g σ υ ν ε χ ή ς συναρτήσεις στο $[a, b]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν

- $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$
- $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

και γενικά

- $\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν η f είναι σ υ ν ε χ ή ς σε διάστημα Δ και $a, b, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^b f(x) dx$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3ο

Έστω f μια σ υ ν ε χ ή ς συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4ο

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ , τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in \Delta,$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ . Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5ο (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, b]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$$

Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

1. Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) g(x) dx$$

$$\text{Π.χ. } I = \int_0^{\pi/2} x(\eta\mu x)' dx = [x\eta\mu x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (x)' \eta\mu x dx$$

$$= [x\eta\mu x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \eta\mu x dx$$

$$= [x\eta\mu x]_0^{\pi/2} + [\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2}.$$

2. Ολοκλήρωση Με Αλλαγή Μεταβλητής:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) g'(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du$$

$$\text{Π.χ. } I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \ln x (\ln x)' dx$$

Θέτω όπου $u = \ln x$, άρα $du = (\ln x)' dx$, $u_1 = 0$ και $u_2 = 1$. Επομένως το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int_0^1 u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$